

Лабораторная работа № 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ВОЛНЫ С ПОМОЩЬЮ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКИ

Цели работы:

Изучение дифракционной решетки как спектрального прибора. В процессе работы необходимо:

- 1) найти длины волн спектральных линий в излучении источника с помощью дифракционной решетки с известным числом штрихов,
- 2) определить число штрихов решетки с неизвестными параметрами,
- 3) по результатам измерений подсчитать угловую дисперсию, линейную дисперсию и разрешающую способность дифракционной решетки.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Дифракционная решетка наряду с призмой часто используется в спектральных приборах в качестве основного элемента, с помощью которого осуществляется анализ спектрального состава излучения.

В основе теории дифракции лежит принцип Гюйгенса. В соответствии с этим принципом каждую точку пространства, которой достигает световая волна, можно считать вторичным источником сферической волны. Френель дополнил принцип Гюйгенса и предложил определять поле в произвольной точке наблюдения как результат интерференции сферических волн, излучаемых вторичными источниками. Принцип Гюйгенса-Френеля является основой приближенных методов решения многих практических задач о дифракции света.

Простейшая дифракционная решетка представляет собой совокупность параллельных щелей одинаковой ширины b на расстоянии $(D - b)$ друг от друга (рис.1).

Обычно дифракционные решетки выполняют таким образом, чтобы свет, попадающий в промежутки между щелями, полностью поглощается, а свет попадающий на щели, свободно проходит к наблюдателю. Длина щелей намного больше их ширины b и периода решетки D .

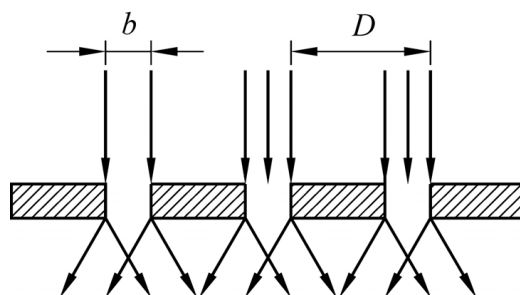


Рис. 1. Дифракция лучей света на дифракционной решетке

Оптическая схема, используемая в данной работе для наблюдения дифракции света, представлена на рис.2.

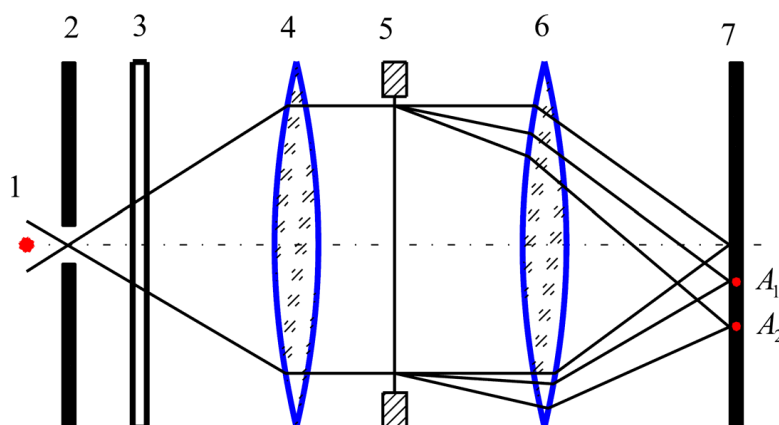


Рис. 2. Оптическая схема для наблюдения дифракции Фраунгофера (дифракции в параллельных лучах) на дифракционной решетке

Источник 1 (ртутная лампа) освещает узкую щель 2. Фильтр 3 выделяет из спектра ртути отдельную спектральную линию. Каждая точка щели 2 дает расходящийся пучок лучей. Линза 4, установленная на фокусном расстоянии от щели 2, преобразует расходящиеся пучки в плоскопараллельный пучок, нормально падающий на дифракционную решетку 5. В результате дифракции за решеткой возникают расходящиеся пучки света. Каждую точку щели в плоскости решетки в соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля можно рассматривать как точечный источник вторичной сферической волны. Вторичные волны падают на линзу 6, которая собирает каждый параллельный пучок лучей в соответствующей точке на экране 7, установленном в ее фокальной плоскости. Так, например, лучи, отклоненные от первоначального направления на угол φ_1 (угол отсчитывается в плоскости, перпендикулярной щели), соберутся в точке A_1 , а лучи, отклоненные на угол φ_2 – в точке A_2 . Интенсивность светового поля в точках A_1, A_2, \dots определяется интерференцией пришедших в эти точки световых пучков. На экране возникнет сложная картина. При выбранной схеме наблюдения она будет представлять собой дифракционную картину Фраунгофера. Вид дифракционной картины определяется спектральным составом излучения, шириной щели 2 и параметрами решетки (числом щелей N , их шириной b , периодом решетки D). Как показано в приложении к настоящей работе, если щель 2 можно считать бесконечно узкой, а падающий на решетку световой поток монохроматическим с длиной волны λ , распределение интенсивности на экране описывается функцией

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \cdot \frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta}, \quad (1)$$

где

$$\alpha = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}, \quad (2)$$

$$\beta = \frac{\pi D \sin \varphi}{\lambda}. \quad (3)$$

Выражение

$$I_1 = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \quad (4)$$

дает распределение интенсивности при дифракции на одной щели. Она максимальна в точке $\alpha = 0$, т.е. при $\varphi = 0$, так как $\lim_{\alpha \rightarrow 0} [(\sin \alpha)/\alpha] = 1$. Нули интенсивности соответствуют значениям $\alpha = k\pi$, т.е.

$$\sin \varphi = k \frac{\lambda}{b}, \quad (5)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$. Между соседними минимумами интенсивности располагаются максимумы, причем интенсивность в максимумах быстро убывает с увеличением номера k . Графически распределение интенсивности в дифракционной картине от одной щели представлено на рис. 3.

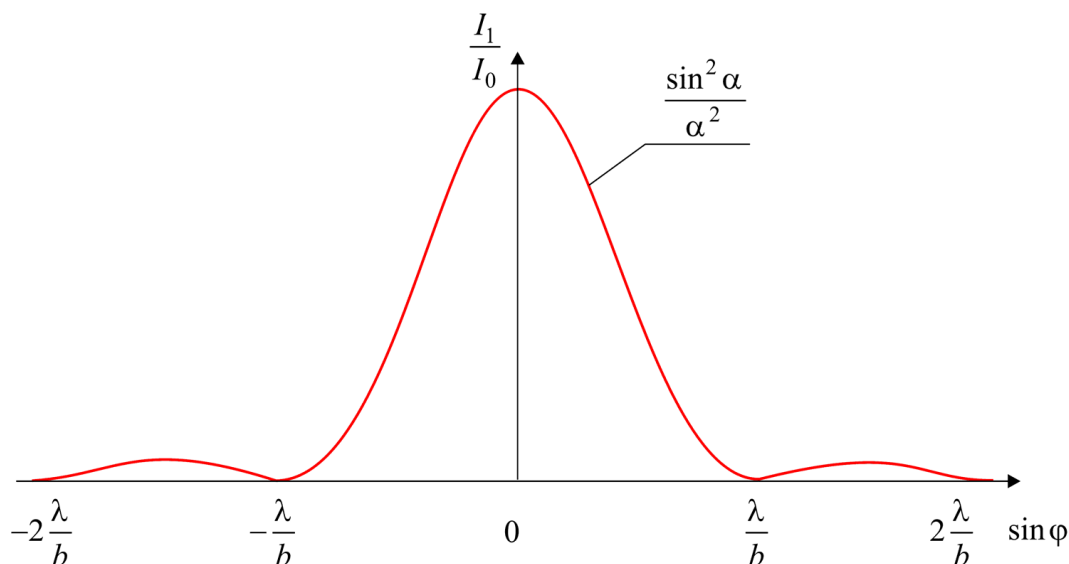


Рис. 3. Угловое распределение интенсивности монохроматического света в дифракционной картине от одной щели

Дифракционная картина от N щелей имеет более сложный вид (рис.5). Функция $(\sin N\beta / \sin \beta)$ обращается в ноль в точках $N\beta = n \cdot \pi$, причем $n \neq m \cdot N$ (m и N – целые числа). Отсюда следует, что при дифракции на N щелях вследствие интерференции N пучков в направлениях, соответствующих условию

$$\sin \varphi = n \frac{\lambda}{ND}, \quad (6)$$

$$(n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots, \pm(ND/\lambda); n \neq \pm mN)$$

появляются дополнительные минимумы (нули) интенсивности. Расстояние между двумя соседними минимумами в шкале $\sin \varphi$ равно $\lambda/(ND)$. Между двумя соседними минимумами имеется один максимум (побочный). В точках $\beta = m\pi$, т.е.

$$\sin \varphi = m \frac{\lambda}{D}, \quad (7)$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots, \pm(D/\lambda); (m \neq \pm kq))$$

наблюдаются главные максимумы. Значения интенсивности в главных максимумах легко найти используя правило Лопиталья

$$\lim_{\beta \rightarrow m\pi} \frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta} = N^2.$$

Отсюда следует, что интенсивность в главных максимумах

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} N^2 \quad (8)$$

при дифракции на N щелях в N^2 раз больше интенсивности, обусловленной одной щелью.

Расстояние между соседними главными максимумами в шкале $\sin \varphi$ равно λ/D . Отсюда следует, что между двумя соседними главными максимумами располагается $N - 1$ минимумов и $N - 2$ побочных максимумов. Интенсивность в минимумах равна нулю, а в побочных максимумах гораздо меньше интенсивности в главных максимумах.

Номер m называется порядком спектра (нулевой, первый, второй, ...). Если отношение D/b равно целому числу q , то на участке λ/b в шкале $\sin \varphi$, равном расстоянию между двумя соседними минимумами в дифракционной картине от одной щели, располагается $(q - 1)$ главных максимумов. При этом пропадают главные максимумы с номерами $m = \pm q, \pm 2q, \pm 3q, \dots$. Это связано с тем, что для таких номеров условие главного максимума (7) превращается в условие минимума интенсивности при дифракции от одной щели. Другими словами, в таких направлениях ни одна из щелей не излучает, так как при этом $\sin^2 \alpha = 0$.

В качестве примера рассмотрим решетку из пяти щелей (рис.4), у которой $D=3b$, то есть $q = 3$. Нули интенсивности в этом случае будут наблюдаться при условии

$$\sin \varphi = n \frac{\lambda}{ND} = n \frac{\lambda}{15b},$$

$$(n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \dots, \pm(15b/\lambda); n \neq \pm 5m).$$

Главным максимумам будут соответствовать углы дифракции, удовлетворяющие условию

$$\sin \varphi = m \frac{\lambda}{D} = m \frac{\lambda}{3b},$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \dots, \pm(3b/\lambda); (m \neq \pm kq)).$$

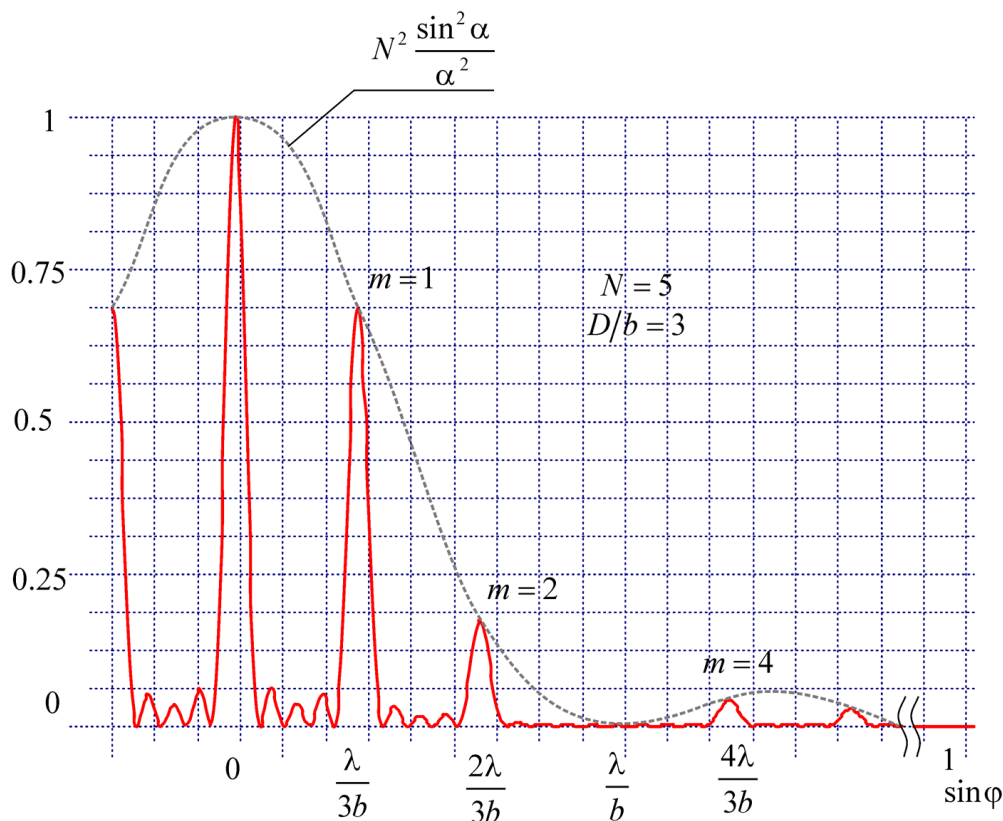


Рис. 4. Угловое распределение интенсивности света в дифракционной картине от 5 щелей

Между двумя соседними главными максимумами имеется $(N - 1) = 4$ минимумов и $(N - 2) = 3$ побочных максимумов. На расстоянии λ/b укладывается $(q - 1) = 2$ главных максимума. Главные максимумы с номерами $m = \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots$ пропадают.

На рисунке 5 представлен график распределения интенсивности в зависимости от синуса угла дифракции для случая девяти щелей и $D/b = 3$ для трех длин волн. Из рисунка хорошо видно, что центральный главный максимум нулевого порядка на экране должен быть белым (неокрашенным), а слева и справа от него наблюдаются спектры первого и второго порядков. Хорошо видно также, что расстояния между спектральными линиями во втором порядке спектра вдвое больше соответствующих расстояний в первом порядке.

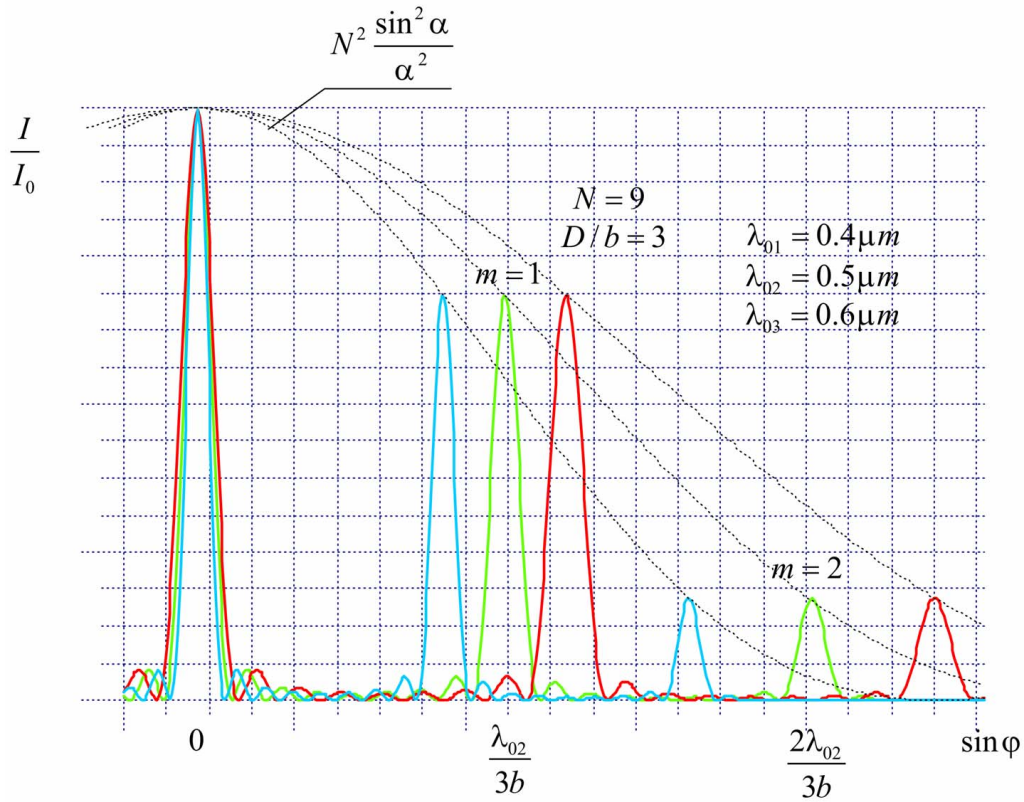


Рис. 5. Угловое распределение интенсивности в дифракционной картине от 9 щелей света для трех длин волн

Разрешающая способность дифракционной решетки

Если в падающем на дифракционную решетку излучении присутствуют две или более спектральные линии, то каждой из них будет соответствовать своя дифракционная картина (см. рис.5). Главные максимумы одного порядка расположатся на расстоянии

$$\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 = m \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{D} .$$

Если длины волн близки друг к другу $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda$, то

$$d(\sin \varphi) = \cos \varphi d\varphi = m \frac{d\lambda}{D} . \tag{9}$$

Отсюда угловая дисперсия

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{D \cos \varphi} . \tag{10}$$

Линейная дисперсия $\frac{dx}{d\lambda} = \frac{dx}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\lambda}$ для малых углов φ , когда $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi \approx \varphi$, равна (см. рис.6)

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{d(f \operatorname{tg} \varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\lambda} \approx f \frac{d\varphi}{d\lambda} \approx \frac{mf}{D \cos \varphi}, \quad (11)$$

где f – фокусное расстояние собирающей линзы (линза 6 на рис. 6 и рис. 2).

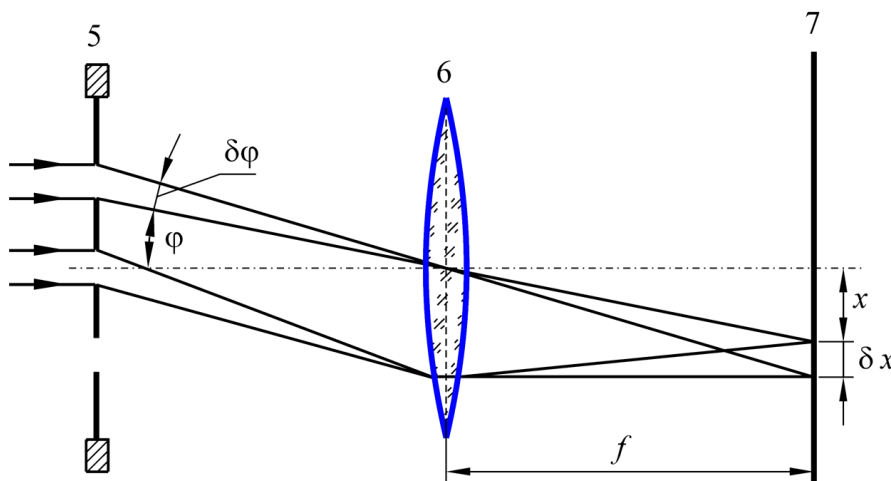


Рис.6. К определению угловой дисперсии света и спектральной разрешающей способности дифракционной решетки

Угол между направлениями, вдоль которых будут наблюдаться m -ные главные максимумы для двух монохроматических волн λ и $\lambda + \Delta\lambda$, не зависит от числа щелей решетки и равен

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} d\lambda = \frac{m}{D \cos \varphi} d\lambda. \quad (12)$$

Поскольку положение главных максимумов на экране зависит от длины волны (см. формулу (7)), дифракционная решетка представляет собой спектральный прибор, позволяющий анализировать спектральный состав падающего излучения.

При этом оказывается, что существует некоторый предел в возможности разрешения близких спектральных линий. Если в спектре падающего излучения имеется дискретный набор монохроматических линий, а разность длин волн $\Delta\lambda$ двух близких линий меньше некоторого предельного значения $\Delta\lambda_0$, то эта пара линий окажется неразличимой, то есть будет восприниматься глазом как одна линия.

В соответствии с критерием Релея линии будут видны отдельно в том случае, если расстояние между ними (см. формулу (9)) больше расстояния между главным максимумом и ближайшим к нему минимумом, то есть

$$\frac{m\Delta\lambda}{D} > \frac{\lambda}{ND}.$$

Таким образом, имеем

$$\Delta\lambda > \frac{\lambda}{mN} = \Delta\lambda_0. \quad (13)$$

Численной характеристикой, определяющей возможности разрешения любого спектрального прибора, является разрешающая способность. Разрешающей

способностью называют отношение средней длины волны к разности длин волн самых близких спектральных линий, которые можно разделить с помощью данного прибора.

Разрешающая способность дифракционной решетки, как следует из соотношения (13), равна

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_0} = mN. \quad (14)$$

Из анализа формул (10), (11), и (14) видно, что угловая и линейная дисперсии решетки не зависят от числа щелей, а разрешающая способность в данном порядке спектра не зависит от периода решетки. Из этих формул ясно, что хорошие решетки должны иметь малый период D и большое число щелей N . Следует, однако, отметить, что период решетки нельзя уменьшать бесконечно. Число m наблюдаемых главных максимумов определяется условием

$$\sin \varphi = \frac{m\lambda}{D} \leq 1,$$

так как $\sin \varphi \leq 1$. Отсюда $D \geq m\lambda$. Лучшие решетки, как следует из этой формулы, имеют не более 1200 щелей на мм. Для такой решетки в видимом диапазоне длин волн (от 4000 до 8000 Å) главные максимумы первого порядка занимают все пространство углов дифракционной картины.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

С помощью дифракционной решетки с известным периодом можно определить длины волн падающего света, измеряя углы дифракции, при которых наблюдаются главные максимумы для разных спектральных линий. Рабочей формулой является условие образования главных максимумов (7):

$$\sin \varphi = m \frac{\lambda}{D}.$$

Если известна длина волны спектральной линии, то можно вычислить по известной длине волны и измеряемым значениям угла φ неизвестное значение периода решетки D . Повторяя измерения для двух близких спектральных линий, можно вычислить угловую дисперсию решетки

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} \approx \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda}.$$

Для определения угла дифракции линейкой измеряют расстояние между двумя главными максимумами с номерами m и $-m$. Половину этого расстояния делят на фокусное расстояние собирающей линзы b и тем самым находят $\operatorname{tg} \varphi$. Если оказывается, что угол φ мал, то можно пользоваться приближенным соотношением $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$.

Порядок проведения измерений

1. Включить осветитель.
2. Поместить первую линзу таким образом, чтобы щель источника света находилась в ее фокальной плоскости. Для этого зрительную трубу настроить на бесконечность (на достаточно удаленный объект) и установить за линзой.

Перемещая линзу между щелью и зрительной трубой, найти положение линзы, при котором в зрительную трубу будет видно четкое изображение щели. Убрать зрительную трубу. На пути параллельного пучка лучей, выходящего из первой линзы, поместить вторую (линза б на рис.2). В фокальной плоскости линзы поставить матовый экран (матовой поверхностью к источнику света). Изменяя ширину щели и в незначительных пределах положения экрана, добиться четкого изображения щели.

3. Между линзами ввести дифракционную решетку с известным периодом D . Решетку следует установить перпендикулярно главной оптической оси системы. Для этого поворачивая решетку вокруг вертикальной оси, найти положение, когда соответствующие порядки спектров расположатся симметрично относительно яркой центральной полосы (нулевого порядка). Нетрудно доказать, что в этом случае угловая, а следовательно, и линейная дисперсия системы будут минимальны, поэтому расстояния между главными максимумами также будут минимальными.
4. На пути лучей установить светофильтр и измерить расстояние между главными максимумами с номерами $m = +1$ и -1 или $m = +2$ и -2 . Половину этого расстояния разделить на фокусное расстояние второй линзы (расстояние между линзой и экраном) и найти $\sin\varphi$. Затем по формуле (7) вычислить неизвестную длину волны.
5. Повторить измерения для других светофильтров.
6. Заменить дифракционную решетку с неизвестным периодом. Повторить измерения углов дифракции и, используя найденные в предыдущем упражнении значения длин волн, определить период решетки D .
7. По данным измерений найти угловую и линейную дисперсии, а также разрешающую способность для обеих дифракционных решеток. Для этого использовать формулы (10), (11) и (14). Число штрихов решетки N определить как отношение диаметра линзы б к периоду D решетки.

Контрольные вопросы

1. Дифракционная решетка как спектральный прибор. Условие главных максимумов, интенсивность света в главных максимумах, расстояние между главными максимумами для света с различными длинами волн.
2. Какова амплитуда суммарной волны, приходящей от одной щели в произвольную точку экрана? Как складываются волны от разных щелей?
3. Изобразите графически распределение интенсивности при дифракции света на решетке с известным числом щелей и заданным отношением периода решетки к ширине щели.
4. Предельная ширина главного максимума. Условие разрешения близких спектральных линий. Разрешающая способность дифракционной решетки.

Литература

1. Матвеев А.Н. Оптика. М.: высшая школа, 1985. Гл.6.
2. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Наука, 1976. Гл.9.

Приложение

Рассмотрим дифракцию на одной щели (бесконечно протяженной) с шириной b . Пусть на такую щель падает параллельный пучок монохроматических лучей с длиной волны λ . Для простоты предположим, что свет падает на плоскость щели нормально (рис.7). Если на выходе из щели стоит собирающая линза, то в каждой точке A_ϕ экрана, помещенного в фокальной плоскости линзы, будет собираться параллельный пучок лучей, выходящих из щели под углом ϕ к нормали.

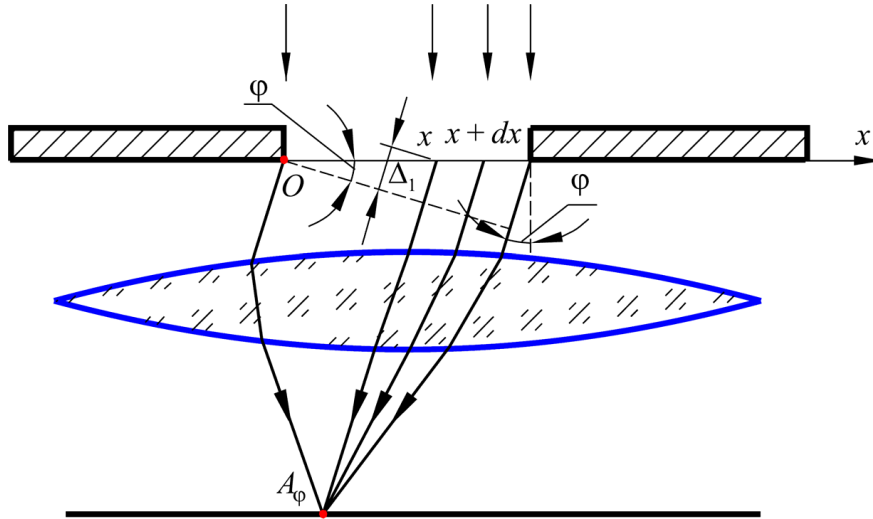


Рис. 7. К расчету результирующих колебаний в дифракции света на одной щели

Выберем ось x с началом отсчета в точке O . Запишем уравнение колебания, приходящего в точку A_ϕ от элемента dx , находящегося на расстоянии x от начала отсчета. Очевидно, если начальную фазу колебания, приходящего из точки O , принять равной нулю, то интересующее нас возмущение может быть представлено в виде

$$dE = \frac{E_0}{b} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - 2\pi \cdot \frac{\Delta_1}{\lambda}\right) \cdot dx. \quad (15)$$

Здесь учтено, что колебание, приходящее в точку A_ϕ от элемента dx , отстает по фазе от колебания, соответствующего точке O , на $2\pi \cdot \Delta_1 / \lambda$, где Δ_1 – геометрическая разность хода, а λ - длина волны в данной среде (в воздухе). Кроме того, амплитуда колебания принята прямо пропорциональной величине площади, которая, в свою очередь, прямо пропорциональна ширине элемента щели dx . Через E_0 обозначена амплитуда колебания, соответствующего всей щели. Введем обозначение.

$$\gamma = \frac{2\pi \sin \phi}{\lambda}.$$

Тогда формула (15) примет вид

$$dE = \frac{E_0}{b} \cdot \cos(\omega \cdot t - \gamma x) \cdot dx. \quad (15')$$

Сложим все возмущения, приходящие в точку A_ϕ от разных элементов, то есть

найдем суммарное возмущение E в точке A_ϕ :

$$E = \int_0^b \frac{E_0}{b} \cos(\omega \cdot t - \gamma x) \cdot dx = \frac{E_0}{\gamma b} \sin(\gamma x - \omega \cdot t) \Big|_{x=0}^{x=b} =$$

$$= \frac{E_0}{\gamma b} \cdot [\sin(\gamma x - \omega \cdot t) + \sin \omega t] = \frac{E_0}{\gamma b} \cdot 2 \sin \frac{\gamma b}{2} \cdot \cos \left(\omega \cdot t - \frac{\gamma b}{2} \right).$$

Обозначив

$$\alpha = \frac{\gamma b}{2} = \frac{\pi b \sin \phi}{\lambda}, \quad (16)$$

получим

$$E = E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \cos(\omega \cdot t - \alpha).$$

Таким образом, возмущение в точке A_ϕ , например, напряженность электрического поля, периодически изменяется с течением времени. Амплитудой этого колебания является не зависящая от времени величина $E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha}$. Квадрат амплитуды с точностью до постоянной определяет интенсивность света I_1 в точке A_ϕ , то есть

$$I_1 = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}. \quad (17)$$

Предположим теперь, что имеется не одна, а N щелей, расположенных на одинаковом удалении D друг от друга (сумма расстояний $a+b=D$ называется периодом или постоянной решетки). Тогда, чтобы найти суммарное возмущение в точке A_ϕ , необходимо сложить элементарные колебания, приходящие из всех щелей, то есть провести интегрирование по x от 0 до $b+(N-1)D$. При этом нужно исключить из области интегрирования участки $b < x < D$, $b+D < x < 2D$, ... $b+kD < x < (k+1)D$..., так как свет, попадая в эти области, полностью поглощается или рассеивается. Поэтому амплитуда волны, излучаемой в точку A_ϕ из этих участков, равна нулю (рис.8).

Таким образом, суммарное колебание E будет иметь вид

$$E = \int_0^b dE + \int_D^{D+b} dE + \dots + \int_{(N-1)D}^{(N-1)D+b} dE = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kD}^{kD+b} dE,$$

где dE определяется формулой (15'). Подсчитаем

$$E_k = \int_{kD}^{kD+b} dE = \int_{kD}^{kD+b} \frac{E_0}{b} \cdot \cos(\omega \cdot t - \gamma x) \cdot dx = \frac{E_0}{b} \sin(\gamma x - \omega \cdot t) \Big|_{kD}^{kD+b} =$$

$$= \frac{E_0}{b} [\sin(\gamma kD + \gamma b - \omega \cdot t) - \sin(\gamma kD - \omega \cdot t)] = \frac{2E_0}{\gamma b} \cdot \sin \frac{\gamma b}{2} \cdot \cos \left(\omega \cdot t - \gamma kD - \frac{\gamma b}{2} \right).$$

Учитывая соотношение (16), имеем

$$E_k = E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos(\omega t - \gamma kD - \alpha).$$

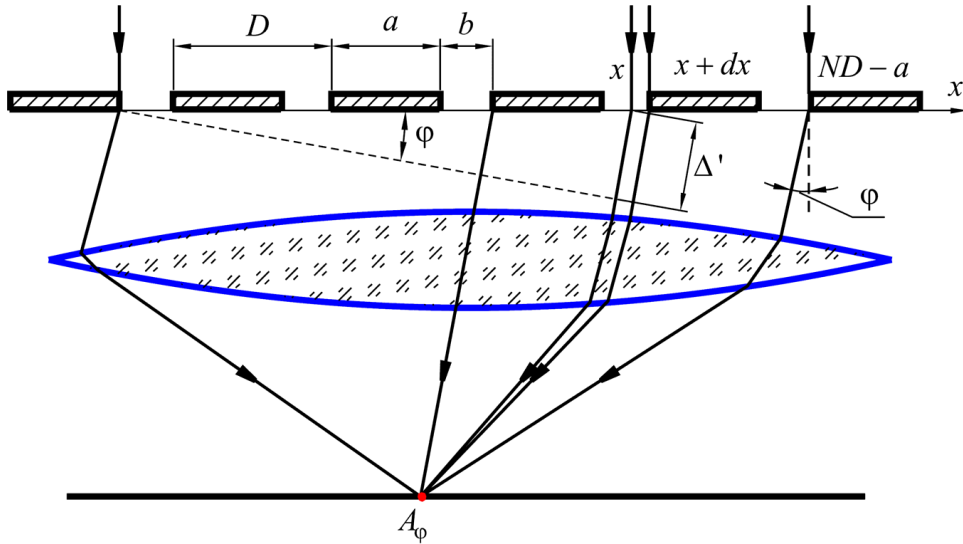


Рис. 8. К расчету амплитуды результирующих колебаний при дифракции света на дифракционной решетке

Как видно, колебания, приходящие в точку A_ϕ от соседних щелей, имеют одну и ту же амплитуду, но отстают друг от друга по фазе на величину γD .

Складывая возмущения E_k , приходящие из отдельных щелей, то есть проводя суммирование по k , получим:

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} E_k = E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} \cos(\omega t - \gamma k D - \alpha).$$

Преобразуем полученное выражение, используя формулу Эйлера:

$$E = E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left[e^{i(\omega t - \alpha)} e^{-i\gamma k D} \right] = E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \operatorname{Re} \left[e^{i(\omega t - \alpha)} \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{-i\gamma D} \right)^k \right].$$

Вычисляя сумму членов геометрической прогрессии по формуле $S = \frac{q^N - 1}{q - 1}$, где q - знаменатель прогрессии, можем записать:

$$\begin{aligned} E &= E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \operatorname{Re} \left[e^{i(\omega t - \alpha)} \cdot \frac{e^{-i\gamma D(N-1)} e^{-i\gamma D} - 1}{e^{-i\gamma D} - 1} \right] = \\ &= E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \operatorname{Re} \left[e^{i(\omega t - \alpha)} \cdot \frac{e^{-i\gamma DN/2} (e^{-i\gamma DN/2} - e^{i\gamma DN/2})}{e^{-i\gamma D/2} (e^{-i\gamma D/2} - e^{i\gamma D/2})} \right]. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\frac{\gamma D}{2} = \beta = \frac{\pi D \sin \phi}{\lambda}$$

и учитывая, что $e^{-ix} - e^{ix} = -2 \cdot i \cdot \sin x$, имеем

$$E = E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \operatorname{Re} \left[e^{i(\omega t - \alpha) - i\beta(N-1)} \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right] =$$
$$= E_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \cdot \cos[\omega \cdot t - \alpha - \beta(N-1)].$$

Из полученного выражения следует, что интенсивность света в точке наблюдения A_φ , определяемая квадратом амплитуды суммарного колебания, равна

$$I = I_0 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \cdot \frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta}.$$